Les cercles de Soddy

Francis Ziegeltrum

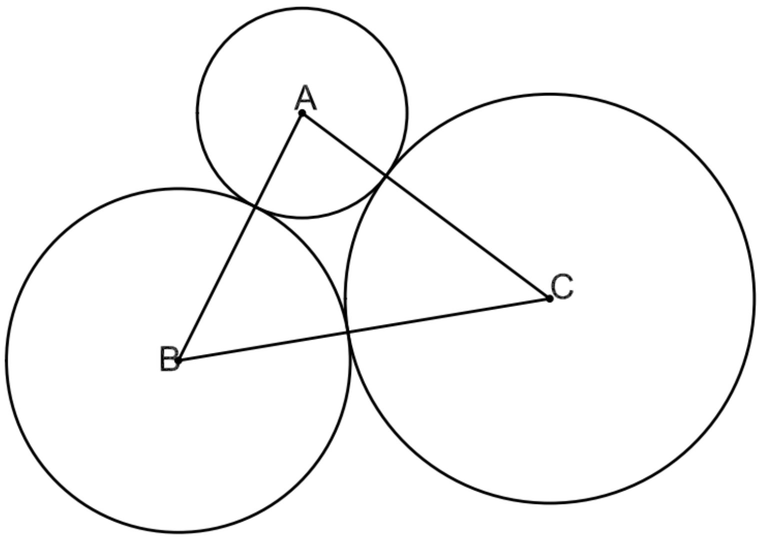
1. Enoncé du problème

Soient trois cercles tangents extérieurement deux à deux.
Déterminer les deux cercles de Soddy tangents à ces trois cercles, l'un intérieurement, l'autre extérieurement.
Ce n’est qu’en 2001 que David Eppstein, professeur d'informatique à l'université de Californie trouva une méthode simple et élégante pour déterminer ces deux cercles.

2. Tracé en utilisant la méthode de David Eppstein

<u>Triangle et cercles de base</u>

- Triangle $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}x_C\\y_C\end{pmatrix}$
- Côtés du triangle $a = \|\overrightarrow{BC}\|, b = \|\overrightarrow{AC}\|, c = \|\overrightarrow{AB}\|$
- C_A cercle centré en A de rayon $R_A = \frac{-a+b+c}{2}$
- C_B cercle centré en B de rayon $R_B = \frac{a-b+c}{2}$
- C_C cercle centré en C de rayon $R_C = \frac{a+b-c}{2}$
- D_{AB} droite passant par les points A et B
- D_{BC} droite passant par les points B et C
- D_{AC} droite passant par les points A et C

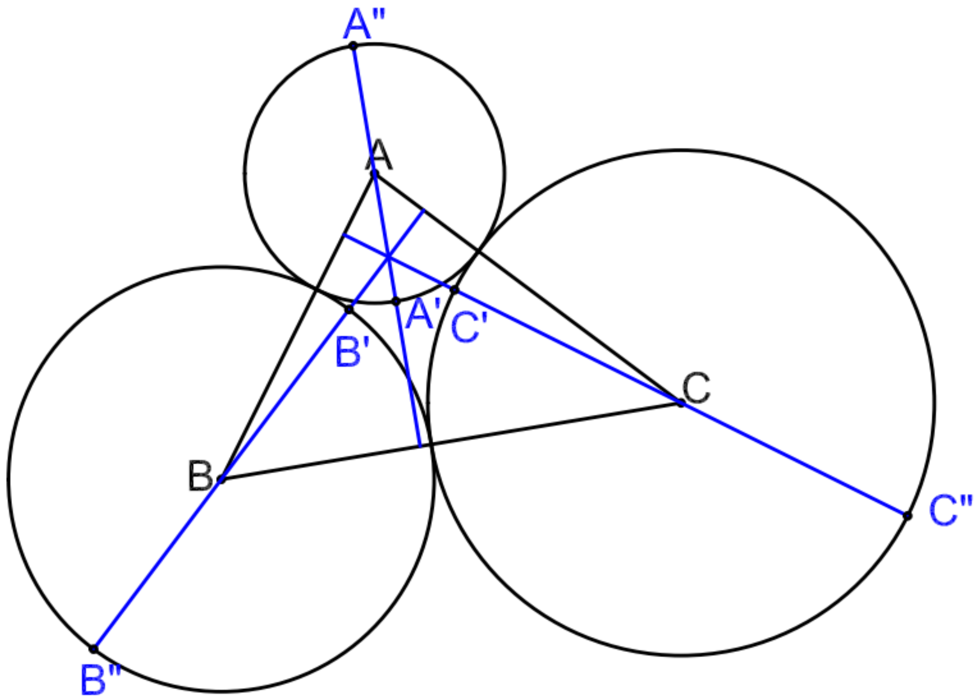


Points d'intersections des hauteurs du triangle avec les cercles opposés

- Tracer la droite passant par le point A et perpendiculaire à D_{BC}, $D_{A\perp BC}$
- Soient $A'\binom{x_{A'}}{y_{A'}}$, $A"\binom{x_{A"}}{y_{A"}}$ les points d'intersection de $D_{A\perp BC}$ avec C_A avec $d(A', D_{BC}) < d(A", D_{BC})$

- Tracer la droite passant par le point B et perpendiculaire à D_{AC}, $D_{B\perp AC}$
- Soient $B'\binom{x_{B'}}{y_{B'}}$, $B"\binom{x_{B"}}{y_{B"}}$ les points d'intersection de $D_{B\perp AC}$ avec C_B avec $d(B', D_{AC}) < d(B", D_{AC})$

- Tracer la droite passant par le point C et perpendiculaire à D_{AB}, $D_{C\perp AB}$
- Soient $C'\binom{x_{C'}}{y_{C'}}$, $C"\binom{x_{C"}}{y_{C"}}$ les points d'intersection de $D_{A\perp BC}$ avec C_A avec $d(C', D_{AB}) < d(C", D_{AB})$



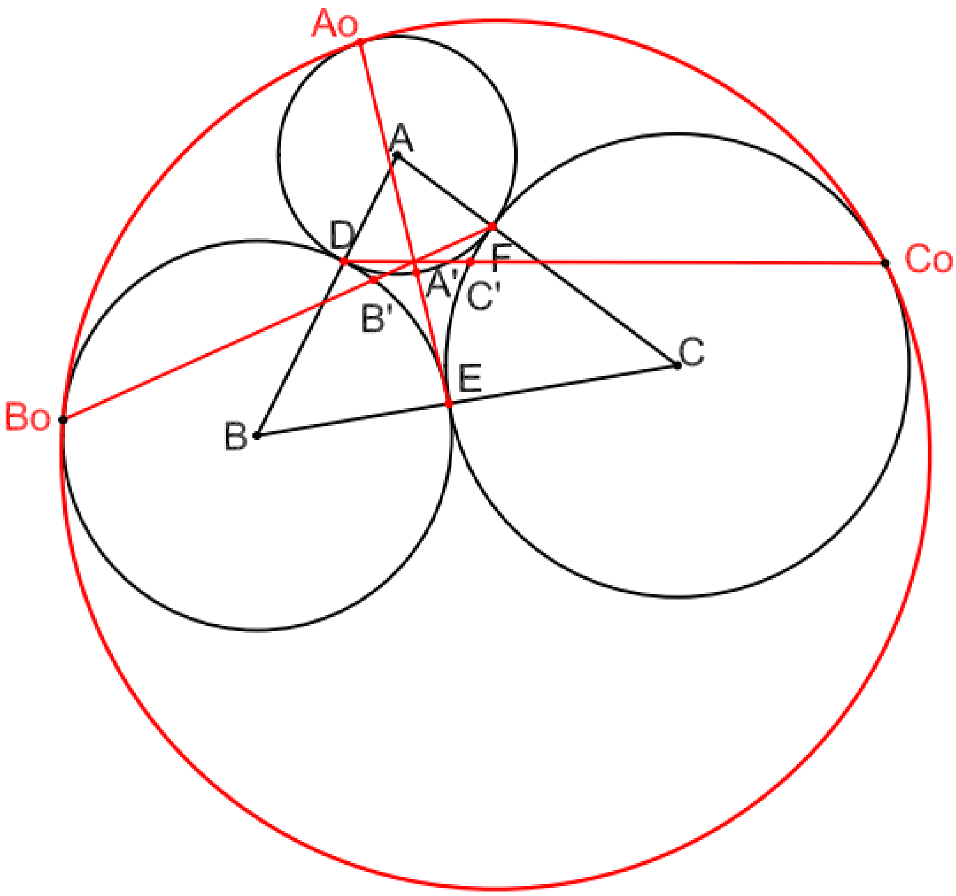
Construction du cercle de Soddy extérieur

- Soit $D\begin{pmatrix}x_D\\y_D\end{pmatrix}$ le point de contact entre les cercles C_A et C_B
- Tracer la droite $D_{C'D}$ passant par les points C' et D
- $Co\begin{pmatrix}x_{Co}\\y_{Co}\end{pmatrix}$ est le point d'intersection de $D_{C'D}$ avec C_C avec $\left\|\overrightarrow{C'D}\right\| < \left\|\overrightarrow{CoD}\right\|$

- Soit $E\begin{pmatrix}x_E\\y_E\end{pmatrix}$ le point de contact entre les cercles C_B et C_C
- Tracer la droite $D_{A'E}$ passant par les points A' et E
- $Ao\begin{pmatrix}x_{Ao}\\y_{Ao}\end{pmatrix}$est le point d'intersection de $D_{A'E}$ avec C_A avec $\left\|\overrightarrow{A'E}\right\| < \left\|\overrightarrow{AoE}\right\|$

- Soit $F\begin{pmatrix}x_F\\y_F\end{pmatrix}$ le point de contact entre les cercles C_A et C_C
- Tracer la droite $D_{B'F}$ passant par les points B' et F
- $Bo\begin{pmatrix}x_{Bo}\\y_{Bo}\end{pmatrix}$est le point d'intersection de $D_{B'F}$ avec C_B avec $\left\|\overrightarrow{B'F}\right\| < \left\|\overrightarrow{BoF}\right\|$

- Le cercle de Soddy extérieur C_{OUT} passe par les points Ao, Bo et Co



Construction du cercle de Soddy intérieur

- Tracer la droite $D_{C"D}$ passant par les points $C"$ et D
- $Ci\binom{x_{Ci}}{y_{Ci}}$est le point d'intersection de $D_{C"D}$ avec C_C avec $\|\overrightarrow{C"D}\| > \|\overrightarrow{CiD}\|$

- Tracer la droite $D_{A"E}$passant par les points $A"$ et E
- $Ai\binom{x_{Ai}}{y_{Ai}}$est le point d'intersection de $D_{A"E}$ avec C_A avec $\|\overrightarrow{A"E}\| > \|\overrightarrow{AiE}\|$

- Tracer la droite $D_{B"F}$ passant par les points $B"$ et F
- $Bi\binom{x_{Bi}}{y_{Bi}}$est le point d'intersection de $D_{B"F}$ avec C_B avec $\|\overrightarrow{B"F}\| > \|\overrightarrow{BiF}\|$

- Le cercle de Soddy intérieur C_{IN} passe par les points Ai, Bi et Ci